# BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

## SESSION 2019

# MATHÉMATIQUES

# Séries STI2D et STL spécialité SPCL

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 4**

ÉPREUVE DU MARDI 18 JUIN 2019

**Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 / 7 à 7 / 7**

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée et qui pourra être valorisée à la correction.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**EXERCICE n° 1 (4 points)**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.*

**Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.**

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

   On note $z_A$ l'affixe d'un point $A$ appartenant au cercle de centre $O$ et de rayon 4. La partie réelle de $z_A$ est positive et sa partie imaginaire est égale à 2.

   Le nombre complexe $z_A$ a pour forme exponentielle :

   **a.** $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

   **b.** $-4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

   **c.** $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

   **d.** $-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

2. Le nombre $-3$ est solution de l'équation :

   **a.** $\ln(x) = -\ln(3)$

   **b.** $\ln(\mathrm{e}^x) = -3$

   **c.** $\mathrm{e}^{\ln(x)} = 3$

   **d.** $\mathrm{e}^x = 3$

3. On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x+1}$.

   La fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et sa fonction dérivée est définie sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

   **a.** $g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}$

   **b.** $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(2x+1)^2}$

   **c.** $g'(x) = \dfrac{(2x+3)\mathrm{e}^x}{(2x+1)^2}$

   **d.** aucune des réponses précédentes

4. On considère l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, dans laquelle $y$ est une fonction de la variable réelle $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

   Une fonction $f$, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $f(0) = 1$ est définie sur $\mathbf{R}$ par :

   **a.** $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

   **b.** $f(x) = \cos(2x)$

   **c.** $f(x) = \sin(2x)$

   **d.** $f(x) = \cos(4x)$

**EXERCICE n° 2 (7 points)**

*Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.*

Le conservatoire des espaces naturels d'une région s'occupe d'une zone protégée de 1 800 hectares. Depuis plusieurs années, il surveille le domaine d'extension d'une plante invasive. Cette plante inhabituelle, d'origine exotique, devient envahissante et cause une régression de la biodiversité. Si le conservatoire constate qu'à la fin d'une année l'aire de la surface occupée par la plante dépasse 80 hectares, cette plante fera alors l'objet d'un plan d'élimination progressive à partir de l'année suivante.

**Partie A**

**1.** Des relevés de la surface occupée par cette plante ont été effectués sur le terrain, en fin d'année, de 2015 à 2018 :

| Année | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|
| Surface en hectares (ha) | 63 | 66,2 | 69,5 | 73 |

Le conservatoire estime que l'aire de la surface occupée par cette plante a augmenté de 5% environ chaque année.

Vérifier que cette estimation est cohérente avec les relevés pris sur le terrain.

**2.** On considère qu'à partir de l'année 2018 la surface occupée par la plante augmente chaque année de 5%.

Expliquer alors pourquoi la décision de commencer l'élimination de la plante devrait être prise à la fin de l'année 2020 par le conservatoire.

**3.** Le conservatoire décide de mettre en œuvre un plan d'élimination progressive. Ce plan prévoit d'éliminer la plante, par arrachage ou par brûlage thermique, sur une surface de 10 hectares à chaque fin d'année, à partir de l'année 2021.

Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $P_n$ l'aire de la surface occupée par la plante, exprimée en hectares, en fin d'année « $2020 + n$ », en prenant $P_0 = 80,5$.

**a.** Montrer que $P_1 = 74{,}525$.

**b.** Justifier que pour tout entier naturel $n$, on a : $P_{n+1} = 1,05P_n - 10$.

**c.** Donner une valeur arrondie de $P_2$ à $10^{-3}$ près.

**d.** Pourquoi la suite $(P_n)$ n'est-elle pas géométrique ?

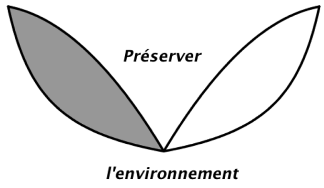
**4.** Le conservatoire décidera de mettre fin au plan d'élimination dès que l'aire de la surface occupée par la plante sera inférieure à 6 hectares. **Recopier** et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'à la fin de son exécution, la variable $n$ contienne le nombre d'années de mise en œuvre du plan.

```
n ← 0
P ← 80,5
Tant que P ⩾ 6
    P ← ...
    n ← ...
Fin Tant que
```

**5.** À la fin de quelle année le plan d'élimination prendra-t-il fin ?

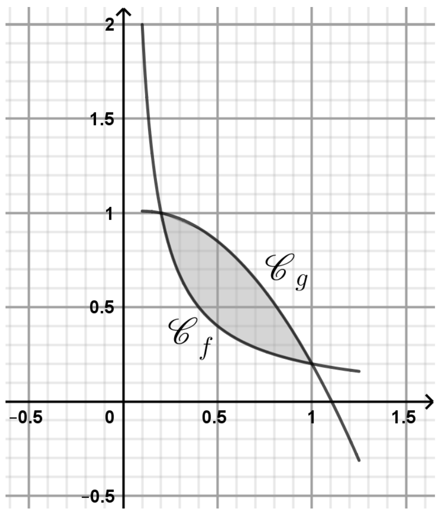
**Partie B**

Le logo utilisé par le conservatoire pour la communication est constitué de deux feuilles symétriques l'une de l'autre, dessinées ci-contre.




Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur l'intervalle $[0,1\,;\,1,25]$ par $f(x) = \frac{0,2}{x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions tracées dans le repère orthonormé ci-dessous.

On admet que ces deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en deux points.




La feuille gauche du logo correspond à la partie grisée du plan, délimitée par ces deux courbes.

1. Vérifier par le calcul que $0,2$ est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Déterminer graphiquement la seconde solution de cette équation.
3. **a.** Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0,2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

   **b.** Donner une valeur approchée de cette intégrale à $10^{-2}$ près.
4. **a.** Montrer que la fonction $F$ définie sur l'intervalle $[0,1;1,25]$ par $F(x) = \frac{1}{5}\ln(x)$ est une primitive sur l'intervalle $[0,1;1,25]$ de la fonction $f$.

   **b.** Calculer la valeur exacte de $J = \displaystyle\int_{0,2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. On admet que la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0,2\,;\,1]$. L'unité choisie sur chacun des axes est de 2,5 cm.

   En déduire, au cm$^2$ près, une valeur approchée de l'aire totale du logo.

**EXERCICE n° 3 (4 points)**

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone ($CO_2$).

Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7h30 à 20h, dans une pièce de volume 900 000 $dm^3$.

À 20h, après une journée de travail, le taux volumique de $CO_2$ dans la pièce est de $0,6\%$.

1. Justifier que le volume de $CO_2$ présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 $dm^3$.

2. Pour diminuer ce taux de $CO_2$ durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de $CO_2$, exprimé en $dm^3$, est alors modélisé par une fonction du temps $t$ écoulé après 20h, exprimé en minutes. $t$ varie ainsi dans l'intervalle $[0;690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20h et 7h30. On admet que cette fonction $V$, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle $(E) : y' + 0,01y = 4,5$.

   **a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E)$.

   **b.** Vérifier que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0 ; 690]$, $V(t) = 4950\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$.

3. Quel sera, au $dm^3$ près, le volume de $CO_2$ dans cette pièce à 21h ?

4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7h30 le taux de $CO_2$ dans cette pièce est inférieur à $0,06\%$.

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de $CO_2$ dans la pièce deviendra inférieur à 900 $dm^3$.

**EXERCICE n° 4 (5 points)**

*Dans cet exercice, les résultats sont à arrondir à* $10^{-3}$ *près.*

**Les trois parties sont indépendantes.**

**Partie A**

Les téléphones portables intègrent des capteurs photographiques de plus en plus évolués. Ces capteurs sont fragiles et ont une durée de vie limitée.

La durée de fonctionnement sans panne, exprimée en années, d'un capteur photographique est modélisée par une variable aléatoire $D$ qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 4$ et $\sigma = 1{,}23$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique ?
2. Déterminer la probabilité $P(3{,}5 \leqslant D \leqslant 4{,}5)$.
3. Lors de l'achat d'un téléphone portable, la garantie pièces et main d'œuvre est de deux ans. Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique soit inférieure à la durée de garantie ?

**Partie B**

Lorsqu'un téléphone portable devient défectueux et qu'il est encore sous garantie, le client peut le déposer dans un point de vente agréé pour réparation ou échange contre un appareil neuf.

On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en jours, avant le retour de l'appareil, réparé ou échangé. Ce temps peut être modélisé par une variable aléatoire $T$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}025$.

1. **a.** Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire $T$.
   **b.** Interpréter cette valeur dans le contexte.
2. Un téléphone portable, défectueux et encore sous garantie, a été déposé par un client dans un point de vente agréé.
   **a.** Calculer la probabilité $P(T \leqslant 7)$ et interpréter ce résultat.
   **b.** Calculer la probabilité que le client doive attendre plus de 20 jours avant de récupérer son téléphone portable.

**Partie C**

Un magazine spécialisé souhaite comparer l'efficacité des services après-vente (S.A.V.) pour les téléphones portables de deux marques A et B. Après une enquête auprès de clients, le magazine obtient les résultats suivants :

| Marque de téléphone | Nombre de clients du S.A.V. ayant répondu à l'enquête | Nombre de clients indiquant avoir récupéré leur téléphone en moins de 20 jours |
|---|---|---|
| A | 120 | 47 |
| B | 92 | 26 |

1. On admet que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la proportion de clients ayant récupéré en moins de 20 jours leur téléphone de marque A est $[0,304\ ;\ 0,480]$.

   Déterminer l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la proportion de clients ayant récupéré en moins de 20 jours leur téléphone de marque B.

2. Au vu des deux intervalles de confiance obtenus, le magazine peut-il indiquer à ses lecteurs qu'il y a une différence significative dans l'efficacité des deux S.A.V. ? Justifier la réponse.